SLOŽENOST ALGORITAMA
I
ODABRANE METODE OPTIMIZACIJE

ZA STUDENTE ELEKTROTEHNIKE

Branko Malešević i Ivana Jovović

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, March 2013

Sadržaj

Glava 1

1. Pseudoinverzne matrice

1.1 Inverzne matrice

Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kvadratna matrica reda n. Neka je $D = detA$. *Inverzna matrica* matrice A je matrica A^{-1}, za koju važi $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$. Matricu za koju postoji inverzna matrica nazivamo *regularnom*. Matricu koja nema inverznu matricu nazivamo *singularnom*. Potreban i dovoljan uslov da matrica A ima inverznu matricu je $detA \neq 0$. Za inverznu matricu matrice A važi $A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA$. *Algebarski komplement (kofaktor)* elementa a_{ij} determinante D je izraz $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, gde je D_{ij} determinanta koja se dobija iz D izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone. Determinanta D_{ij} se naziva *minorom* determinante D. *Adjungovana matrica* matrice A je matrica $adjA = [A_{ij}]^T_{n\times n}$.

Zadatak 1.1 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Odrediti A^{-1}.

Rešenje.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad detA = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16+9+9-12-12-9 = 25-24 = 1$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 & A_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -3 \\
A_{12} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 & A_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \\
A_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 & A_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \\
A_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \\
A_{32} &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

□

Inverznu matricu matrice A možemo odrediti i *Gauss-Jordan-ovom metodom.* Gauss-Jordan-ova metoda je u direktnoj vezi sa rešavanjem sistema linearnih algebarskih jednačina. Neka je dat sistem n linearnih algebarskih jednačina sa nepoznatim $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
$$

Matricu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nazivamo *matricom sistema*. Kolonu $x = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ nazivamo *kolonom nepoznatih*. Kolonu $b = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_n]^T$ nazivamo *kolonom slobodnih članova*. Matricu $B = [a_{ij} \mid b_j]_{n\times(n+1)} = [A \mid b]$ nazivamo *proširenom matricom sistema*. Determinantu $D = detA$ nazivamo *determinantom sistema*. Matrični zapis prethodnog sistema je $Ax = b$. Dati sistem ima jedinstveno rešenje $x = A^{-1}b$ ako i samo ako matrica sistema ima inverznu matricu, odnosno ako i samo ako je $D \neq 0$. Prema *Kronecker-Capelli-jevoj teoremi*, dati sistem ima jedinstveno rešenje ako i samo ako je $rangB = rangA = n$. Podsetimo se, *rang matrice* A, u oznaci $rangA$, je red njene najveće regularne podmatrice. Podmatrica matrice A je matrica koja se dobija od matrice A izostavljanjem odgovarajućih vrsta i kolona. Matrična jednačina $A\cdot X = I$, gde je A data regularna matrica reda n, I jedinična matrica reda n i X nepoznata matrica reda n, ima jedinstveno rešenje $X = A^{-1}$. Datu jednačinu možemo zapisati:

$$A \cdot [X_{\downarrow 1}\ X_{\downarrow 2}\ \ldots\ X_{\downarrow n}] = [e_1\ e_2\ \ldots\ e_n],$$

gde je $X_{\downarrow i}$ i-ta kolona matrice X, a e_i kolona koja ima sve elemente jednake 0 izuzev elementa u i-toj vrsti koji je jednak 1, $1 \le i \le n$. Dalje imamo $A\cdot[X_{\downarrow 1}\ X_{\downarrow 2}\ \ldots\ X_{\downarrow n}] = [A\cdot X_{\downarrow 1}\ A\cdot X_{\downarrow 2}\ \ldots\ A\cdot X_{\downarrow n}]$. Prema tome, datu jednačinu možemo zapisati kao n sistema linearnih algebarskih jednačina:

$$
\begin{aligned}
A\cdot X_{\downarrow 1} &= e_1 \\
A\cdot X_{\downarrow 2} &= e_2 \\
&\ldots \\
A\cdot X_{\downarrow n} &= e_n.
\end{aligned}
$$

Odakle dobijamo $[X_{\downarrow 1}\ X_{\downarrow 2}\ \ldots\ X_{\downarrow n}] = [A^{-1}\cdot e_1\ A^{-1}\cdot e_2\ \ldots\ A^{-1}\cdot e_n] = A^{-1}$. Sa druge strane, datih n sistema možemo rešavati istovremeno korišćenjem elementarnih transformacija vrsta, tj. $[A \mid e_1\ e_2\ \ldots\ e_n] = [A \mid I] \cong \ldots \cong [I \mid A^{-1}]$. U daljem tekstu dajemo kratak pregled o elementarnim transformacijama vrsta i kolona.

Elementarna matrica I tipa je kvadratna matrica reda n koja na dijagonali ima sve elemente izuzev na poziciji (i,i), $1 \le i \le n$, jednake 1, na poziciji (i,i) je element u različit od 0, a elementi van dijagonale su jednaki 0; odnosno to je matrica koja se od jedinične matrice razlikuje samo u jednom elementu na dijagonali i koja je oblika

$$E = \begin{bmatrix}
1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & u & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{bmatrix}.$$

Primetimo da je matrica E regularna i da je njen inverz

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

takođe elementarna matrica I tipa. Množenje sleva matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje je i-ta vrsta pomnožena elementom u. Množenje zdesna matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje je i-ta kolona pomnožena elementom u. Jedinična matrica I je elementarna matrica I tipa, za element u uzmimo 1. *Elementarna transformacija vrsta I tipa* matrice A je množenje jedne vrste matrice A elementom koji je različit od 0. *Elementarna transformacija kolona I tipa* matrice A je množenje jedne kolone matrice A elementom koji je različit od 0. Izvršavanje elementarne transformacije vrsta (kolona) I tipa matrice A je u stvari množenje matrice A sleva (zdesna) elementarnom matricom I tipa.

Zatim, *elementarna matrica II tipa* je matrica dobijena od jedinične matrice reda n zamenom mesta i-toj i j-toj vrsti, odnosno to je matrica oblika

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Datu matricu E možemo dobiti i zamenom mesta i-toj i j-toj koloni u jediničnoj matrici. Matrica E je regularna i njen inverz je ona sama. Množenje sleva matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje su i-ta i j-ta vrsta zamenile mesta. Množenje zdesna matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje su i-ta i j-ta kolona zamenile mesta. Otuda zaključujemo da je $E^2 = I$, t.j. da je matrica E sama sebi inverz. *Elementarna transformacija vrsta II tipa* matrice A je zamena mesta dvema vrstama date matrice. *Elementarna transformacija kolona II tipa* matrice A je zamena mesta dvema kolonama matrice A. Izvršavanje elementarne transformacije vrsta (kolona) II tipa matrice A je množenje matrice A sleva (zdesna) elementarnom matricom II tipa.

Elementarna matrica III tipa je kvadratna matrica reda n koja na dijagonali ima sve elemente jednake 1, na poziciji (i, j) proizvoljan element a, i sve ostale elemente jednake 0; odnosno to je matrica koja se od jedinične matrice razlikuje samo u jednom elementu van dijagonale i oblika je

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je matrica E regularna i da je njen inverz

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & -a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

takođe elementarna matrica III tipa. Množenje sleva matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje je i-ta vrsta zamenjena zbirom i-te vrste i j-te vrste pomnožene sa a. Množenje zdesna matrice A matricom E kao rezultat daje matricu A kod koje je j-ta kolona zamenjena zbirom j-te kolone i i-te kolone pomnožene sa a. *Elementarna transformacija vrsta III tipa* matrice A je zamena jedne vrste matrice A sa zbirom te vrste i neke druge vrste pomnožene brojem. *Elementarna operacija III tipa na kolonama* matrice A je zamena jedne kolone matrice A sa zbirom te kolone i neke druge kolone pomnožene brojem. Izvršavanje elementarne transformacije vrsta (kolona) III tipa matrice A je u stvari množenje matrice A sleva (zdesna) elementarnom matricom III tipa.

Elementarne matrice I, II ili III tipa dobijamo primenom elementarnih transformacija vrsta (kolona) I, II ili III tipa na jediničnu matricu I. *Elementarna matrica* je elementarna matrica I, II ili III tipa. *Elementarna transformacija vrsta* je elementarna transformacija vrsta I, II ili III tipa. *Elementarna transformacija kolona* je elementarna transformacija kolona I, II ili III tipa.

Matrice A_1 i A_2 su *vrsta-ekvivalentne* ako se matrica A_2 može dobiti od matrice A_1 primenom konačnog broja elementarnih transformacija vrsta. Matrice A_1 i A_2 su *kolona-ekvivalentne* ako se matrica A_2 može dobiti od matrice A_1 primenom konačnog broja elementarnih transformacija kolona. Matrice A_1 i A_2 su *ekvivalentne* , u oznaci $A_1 \cong A_2$, ako se matrica A_2 može dobiti od matrice A_1 primenom konačnog broja elementarnih transformacija vrsta i kolona. Odnosno, matrice A_1 i A_2 su vrsta-ekvivalentne ako postoji konačan niz elementarnih matrica $P_1, P_2, \dots, P_r$ takvih da važi $A_2 = P_r \dots P_2 P_1 A_1$. Matrice A_1 i A_2 su kolona-ekvivalentne ako postoji konačan niz elementarnih matrica $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ takvih da važi $A_2 = A_1 Q_1 Q_2 \dots Q_s$. I na kraju, matrice A_1 i A_2 su ekvivalentne ako postoje elementarne matrice $P_1, P_2, \dots, P_r$ i $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ takve da važi $A_2 = P_r \dots P_2 P_1 A_1 Q_1 Q_2 \dots Q_s$. Vrsta-ekvivalencija, kolona-ekvivalencija i ekvivalencija su relacije ekvivalencije na skupu svih matrica istog tipa. Zaista, refleksivnost sledi iz činjenice da je jedinična matrica elementarna matrica. Simetričnost sledi iz činjenice da su elementarne matrice regularne. Pokažimo tranzitivnost. Neka za matrice A_1, A_2 i A_3 važi $A_1 \cong A_2$ i $A_2 \cong A_3$. Tada postoje elementarne matrice $P_1, P_2, \dots, P_r, P'_1, P'_2, \dots, P'_{r'}$ i $Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{s'}$ takve da važi $A_2 = P_r \dots P_2 P_1 A_1 Q_1 Q_2 \dots Q_s$ i $A_3 = P'_{r'} \dots P'_2 P'_1 A_2 Q'_1 Q'_2 \dots Q'_{s'}$. Pa imamo $A_3 = P'_{r'} \dots P'_2 P'_1 P_r \dots P_2 P_1 A_1 Q_1 Q_2 \dots Q_s Q'_1 Q'_2 \dots Q'_{s'}$, odnosno $A_1 \cong A_3$.

Zadatak 1.2 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Koristeći Gauss-Jordan-ovu metodu odrediti A^{-1}.

Rešenje.

$$\begin{aligned} [A \mid I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

U prvom koraku prvu vrstu matrice A pomnožili smo sa -1 i dodali drugoj, zatim smo u drugom koraku prvu vrstu dobijene matrice pomnožili smo sa -1 i dodali trećoj. U trećem koraku smo drugu vrstu pomnožili sa -3 i dodali prvoj vrsti, i na kraju u četvrtom koraku smo treću vrstu pomnožili sa -3 i dodali prvoj.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Slično, korišćenjem elementarnih transformacija kolona takođe možemo odrediti inverznu matricu date matrice.

Zadatak 1.3 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Koristeći elementarne transformacije kolona odrediti A^{-1}.

Rešenje.

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I \\ \hline A^{-1} \end{array}\right].$$

U prvom koraku prvu kolonu matrice A pomnožili smo sa -3 i dodali drugoj, zatim smo u drugom koraku prvu kolonu dobijene matrice pomnožili smo sa -3 i dodali trećoj. U trećem koraku smo drugu kolonu pomnožili sa -1 i dodali prvoj koloni, i na kraju u četvrtom koraku smo treću kolonu pomnožili sa -1 i dodali prvoj.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Ukoliko je matrica A regularna tada postoje elementarne matrice $P_1, P_2, \ldots, P_r$ i $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ takve da važi $I = P_r \ldots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \ldots Q_s$. Neka je $P = P_r \ldots P_2 P_1$ i $Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_s$. Matrice P i Q su regularne kao proizvod elementarnih matrica. Množenjem jednakosti $P \cdot A \cdot Q = I$ sleva matricom P^{-1} i zdesna matricom Q^{-1} dobijamo $A = P^{-1} \cdot Q^{-1} = (Q \cdot P)^{-1}$. Odakle zaključujemo da je $A^{-1} = Q \cdot P$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & \end{array}\right] \cong \ldots \cong \left[\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline Q & \end{array}\right] \qquad A^{-1} = Q \cdot P$$

Zadatak 1.4 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Koristeći elementarne transformacije vrsta i kolona odrediti A^{-1}.

Rešenje.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & -3 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right].$$

U prvom koraku prvu vrstu matrice A pomnožili smo sa -1 i dodali drugoj, zatim smo u drugom koraku prvu vrstu dobijene matrice pomnožili smo sa -1 i dodali trećoj. U trećem koraku smo prvu kolonu pomnožili sa -3 i dodali drugoj koloni, i na kraju u četvrtom koraku smo prvu kolonu pomnožili sa -3 i dodali trećoj.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P_2 \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = Q \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 1.5 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Koristeći elementarne transformacije vrsta odrediti A^{-1}.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
[A \mid I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right] \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}].
\end{aligned}
$$

U prvom koraku drugu vrstu matrice A pomnožili smo sa -1 i dodali prvoj, zatim smo u drugom koraku prvu vrstu dobijene matrice pomnožili smo sa -2 i dodali drugoj. U trećem koraku smo zamenili mesta drugoj i trećoj vrsti. U četvrtom koraku smo drugu vrstu pomnožili sa -3 i dodali trećoj. U petom koraku smo treću vrstu pomnožili sa -1 i dodali drugoj. I na kraju, u šestom koraku smo drugu vrstu pomnožili sa -1. Dakle, imamo sledeće elementarne matrice

$$
P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \; P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; P_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\
&\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 1.6 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Koristeći elementarne transformacije kolona odrediti A^{-1}.

Rešenje.

$$\left[\frac{A}{I}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -14 \\ \hline 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 1 & \frac{3}{14} \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{4}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{6}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{array}\right] = \left[\frac{I}{A^{-1}}\right].$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

U prvom koraku prvu kolonu matrice A pomnožili smo sa -2 i dodali drugoj, zatim smo u drugom koraku prvu kolonu dobijene matrice dodali trećoj. U trećem koraku smo zamenili mesta drugoj i trećoj koloni. U četvrtom koraku smo drugu kolonu pomnožili sa -3 i dodali trećoj. U petom koraku smo treću kolonu pomnožili sa $-\frac{1}{14}$. U šestom i sedmom koraku smo pomnožili treću kolonu sa -3 i -2 i dodali je drugoj i prvoj koloni. I na kraju, u osmom koraku smo dodali drugu kolonu prvoj. Zapisano pomoću elementarnih matrica imamo:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} \quad Q_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot Q_5 \cdot Q_6 \cdot Q_7 \cdot Q_8 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 1.7 Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Koristeći elementarne transformacije vrsta i kolona odrediti A^{-1}.

Rešenje.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right].$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = Q \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

U prvom koraku prvu vrstu matrice A pomnožili smo sa -3 i dodali drugoj, zatim smo u drugom koraku prvu vrstu dobijene matrice pomnožili smo sa -1 i dodali trećoj. U trećem koraku smo drugu vrstu pomnožili sa $-\frac{1}{4}$. U četvrtom koraku smo drugu vrstu dodali trećoj. I na kraju u petom i šestom koraku smo prvu kolonu pomnožili sa -2 i -1 i dodali redom drugoj i trećoj koloni.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P &= P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = Q \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

□

Zadatak 1.8 Odrediti inverznu matricu Pascal-ove matrice $P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\left[\, P_4 \,\middle|\, I \,\right] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\cong \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
&= \left[\, I \,\middle|\, P_4^{-1} \,\right]
\end{aligned}$$

U prvom, drugom i trećem koraku prvu vrstu matrice P_4 pomnožili smo sa -1 i dodali drugoj, trećoj i četvrtoj vrsti, zatim smo u četvrtom i petom koraku drugu vrstu dobijene matrice pomnožili redom sa -2 i -3 i dodali trećoj i četvrtoj vrsti. I na kraju u šestom koraku smo treću vrstu pomnožili sa -3 i dodali četvrtoj vrsti.

$$P_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 1.9 Odrediti inverznu matricu Vandermonde-ove matrice $V_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix}$.

Rešenje.

$$
\left[\begin{array}{c} V_4 \\ \hline I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 12 \\ 1 & 6 & 24 & 60 \\ 1 & 14 & 78 & 252 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 24 \\ 1 & 14 & 36 & 168 \\ \hline 1 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\cong \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 6 & 7 \\ \hline 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \\ \hline 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{array}\right]
$$

$$
\cong \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{7}{4} & \frac{19}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{24} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -\frac{13}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ -3 & \frac{19}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I \\ \hline V_4^{-1} \end{array}\right]
$$

U prvom, drugom i trećem koraku prvu kolonu matrice V_4 pomnožili smo redom sa -2, -3 i -4 i dodali drugoj, trećoj i četvrtoj koloni. Zatim smo u četvrtom i petom koraku drugu kolonu dobijene matrice pomnožili redom sa -3 i -6 i dodali trećoj i četvrtoj koloni. U šestom koraku smo drugu kolonu podelili sa 2. U sedmom koraku smo treću kolonu podelili sa 6. U osmom koraku smo četvrtu kolonu podelili sa 24. Zatim smo u devetom koraku od četvrte kolone oduzeli treću. U desetom, jedanaestom i dvanaestom koraku smo četvrtu kolonu pomnožili sa -6, -7 i -1 i dodali je redom trećoj, drugoj i prvoj koloni. U trinaestom i četrnaestom koraku smo treću kolonu pomnožili sa -3 i -1 i dodali je redom drugoj i prvoj koloni. I na kraju u petnaestom koraku smo drugu kolonu pomnožili sa -1 i dodali prvoj koloni.

$$
V_4^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ -3 & \frac{19}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}.
$$

□

Zadatak 1.10 Odrediti inverznu matricu Hilbert-ove matrice $H_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Rešenje.

$$
\left[\begin{array}{c|c} H_4 & I \\ \hline I & \end{array}\right] =
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right] \cong
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\
0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{12} & \frac{9}{112} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right] \cong
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\
0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{12} & \frac{9}{112} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right] \cong
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{120} & \frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{120} & \frac{9}{700} & \frac{1}{5} & -\frac{9}{10} & 0 & 1 \\ \hline
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right] \cong
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5 & \frac{3}{40} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{120} & \frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{700} & \frac{1}{5} & -\frac{9}{10} & 0 & 1 \\ \hline
1 & -6 & -20 & -\frac{1}{4} & & & & \\
0 & 12 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 60 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right] \cong
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{120} & \frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{700} & \frac{1}{5} & -\frac{9}{10} & 0 & 1 \\ \hline
1 & -6 & 10 & \frac{1}{5} & & & & \\
0 & 12 & -60 & -\frac{9}{10} & & & & \\
0 & 0 & 60 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right] \cong
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{40} & \frac{1}{2} & -3 & 3 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{700} & \frac{1}{5} & -\frac{9}{10} & 0 & 1 \\ \hline
1 & -6 & 10 & \frac{1}{5} & & & & \\
0 & 12 & -60 & -\frac{9}{10} & & & & \\
0 & 0 & 60 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right] \cong
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{40} & \frac{1}{2} & -3 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2800} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \hline
1 & -6 & 10 & \frac{1}{5} & & & & \\
0 & 12 & -60 & -\frac{9}{10} & & & & \\
0 & 0 & 60 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right] \cong
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -3 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{70} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \hline
1 & -6 & 10 & 8 & & & & \\
0 & 12 & -60 & -36 & & & & \\
0 & 0 & 60 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 40 & & & &
\end{array}\right] \cong
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{70} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \hline
1 & -6 & 10 & -2 & & & & \\
0 & 12 & -60 & 24 & & & & \\
0 & 0 & 60 & -60 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 40 & & & &
\end{array}\right] \cong
$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 42 & -105 & 70 \\ \hline 1 & -6 & 10 & -2 & & & & \\ 0 & 12 & -60 & 24 & & & & \\ 0 & 0 & 60 & -60 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 40 & & & & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline Q & \end{array}\right]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -3 & 3 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 42 & -105 & 70 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 10 & -2 \\ 0 & 12 & -60 & 24 \\ 0 & 0 & 60 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} H_4^{-1} &= Q \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 10 & -2 \\ 0 & 12 & -60 & 24 \\ 0 & 0 & 60 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -3 & 3 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 42 & -105 & 70 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$